Lösung Lernkontrolle 2

1. **a)** $P[X=n] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$, für $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Wir haben

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} kP[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} kP[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P[X=k] = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2-k)P[X=k] + \sum_{k=0}^{\infty} kP[X=k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P[X=k] + E[X] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P[X=k] + \lambda \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

d) Es gilt

$$E[X^2+X-1] = E[X^2] + E[X] - E[1] = \lambda^2 + \lambda + \lambda - 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 1.$$

2. **a)**

$$1 \overset{!}{=} \int_0^1\int_0^1 C(x^2+y^2)\,dx\,dy = C\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy = C\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}C\ .$$

Damit findet man $C = \frac{3}{2}$.

Bitte wenden!

b) Für die Randdichte von X hat man für $0 \leq x \leq 1$,

$$f_X(x) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 + y^2)dy = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

Also hat man

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Randdichte von Y hat man für $0 \leq y \leq 1$,

$$f_Y(y) = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 + y^2)dy = \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2}.$$

Also hat man

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{2} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Im Falle, dass X und Y unabhängig voneinander sind, würde $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ gelten, was nicht der Fall ist. Folglich sind X und Y NICHT unabhängig.

d)

$$\begin{aligned} P[X \geq Y] &= \frac{3}{2}\int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2)dydx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x^3 + \frac{x^3}{3})dx \\ &= \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\Big) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$